Fouriertransformation

Lucas Kunz

28. Juli 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Absolut integrierbare Funktionen

Sei $f \in R([-r,r],\mathbb{C})$, $r > 0$, dann heißt F absolut integrierbar, wenn

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \,\mathrm{d}x < \infty, \tag{1.1}$$

also wenn das uneigentliche Integral über die Funktion konvergiert. In diesem Fall bezeichnet man das obige Integral auch als 1-Norm von f, also $\|f\|_1$. Die Menge der Funktionen mit dieser Eigenschaft ist wie folgt bezeichnet:

$$a := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} | f \text{ ist absolut integrierbar}\}. \tag{1.2}$$

Diese Menge ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und mit der 1-Norm normiert; es gilt die Dreiecks-Ungleichung. In starker Analogie zu Reihen kann man die Integrierbarkeit auch durch Minoranten und Majoranten zeigen oder ausschließen.

2 Quadratintegrierbare Funktionen

$f \in R([-r,r],\mathbb{C})$, $r > 0$, heißt quadratintegrierbar, wenn das uneigentliche Integral über ihr Betragsquadrat konvergiert, also ihre 2-Norm endlich ist:

$$f \in b \quad \Leftrightarrow \quad \|f\|_2 := \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} < \infty. \tag{2.1}$$

Auch b ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum, in dem für die 2-Norm eine Dreiecksungleichung gilt.

3 Transformation und Regeln

Die Transformierte einer Funktion $f \in a$ ist definiert als

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\xi x} \,\mathrm{d}x. \tag{3.1}$$

Weil stets $|e^{-i\xi x}| = 1$ für $x \in \mathbb{R}$ ist $|\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1$ und somit auch $\|\hat{f}(\xi)\|_\infty \leq \|f\|_1$. Die Transformierte ist immer eine stetige Funktion und geht an den Randwerten gegen Null, also $\hat{f}(\xi) \to 0$ ($|\xi| \to \infty$) (Lemma von Riemann-Lebesgue). Die Transformation gehorcht den folgenden Regeln ($f \in a, x, \xi \in \mathbb{R}$):

- Sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $g(x) = f(ax)$, dann ist $\hat{g}(\xi) = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\xi}{a}\right)$.
- Ist $b \in \mathbb{R}$ und $g(x) = f(x-b)$, so ist $\hat{g}(\xi) = e^{-i\xi b}\hat{f}(\xi)$.
- Falls $b \in \mathbb{R}$ und $g(x) = e^{ibx}f(x)$, dann folgt $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi - b)$.
- Sei $g(x) = -ixf(x)$ und $g \in a$, dann ist $\hat{f}$ differenzierbar und es ist $(\hat{f}(\xi))' = \hat{g}(\xi)$.
- Ist f differenzierbar und $f' \in a$, dann ist $(\hat{f'})(\xi) = i\xi\, \hat{f}(\xi)$.

4 Rücktransformation und Faltung

Es lässt sich zeigen, dass man auch eine inverse Transformation definieren kann, sodass aus der Fouriertransformierten wieder die normale Funktion wird:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\, e^{i\xi x}\, \mathrm{d}\xi. \tag{4.1}$$

Auch im Bezug auf Faltungen hat die Fouriertransformation nützliche Eigenschaften. Existiert eine gefaltete Funktion

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(x-\tau)\, \mathrm{d}\tau, \tag{4.2}$$

dann gilt für deren Transformierte, dass sie sich als Produkt der Transformierten der Einzelfunktionen darstellen lässt:

$$\hat{h}(\xi) = \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi). \tag{4.3}$$

Auf diese Weise lassen sich Faltungsintegrale, die zumeist schwerer errechenbar sind, im Fourierraum komplett umgehen.

Beweis. Sei $h(x) := (f * g)(x)$, dann gilt

$$\hat{h}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \cdot e^{-i\xi x}\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(x-\tau)\, \mathrm{d}\tau \right) \cdot e^{-i\xi x}\, \mathrm{d}x.$$

Machen wir nun die Substitution $x - \tau =: k$, also $x = k + \tau$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}k$, dann folgt daraus

$$\begin{aligned} \hat{h}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, g(k)\, \mathrm{d}\tau \right) \cdot e^{-i\xi(k+\tau)}\, \mathrm{d}k \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot e^{-i\xi\tau}\, \mathrm{d}\tau \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(k) \cdot e^{-i\xi k}\, \mathrm{d}k \right) = \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi). \end{aligned}$$

□

5 Dancing-Hat-Lemma

Wenn man ausreichend Kenntnisse über die Transformierten verschiedener Funktionen hat, lassen sich Integrale über Produkte ineinander umformen. Für $f, g \in \mathscr{a}$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\, g(\xi)\, \mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\, \hat{g}(\xi)\, \mathrm{d}\xi. \tag{5.1}$$

Man kann also unter dem Integral die Transformation beliebig zwischen den beiden Funktionen verschieben.

Beweis.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\, g(\xi)\, \mathrm{d}\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\xi x}\, \mathrm{d}x \right) g(\xi)\, \mathrm{d}\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\, e^{-i\xi x}\, \mathrm{d}\xi \right) f(x)\, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(x)\, f(x)\, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Im letzten Integral kann hierbei die Variable x gegen ξ ausgetauscht werden, um exakt das Bild wie in Gleichung 5.1 zu erhalten. □

6 Satz von Plancherel

Ist $f \in \mathscr{b} \cap \mathscr{a}$, dann ist $\hat{f} \in \mathscr{b}$ und es gilt

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\|\hat{f}\|_2^2. \tag{6.1}$$

Beweis. Sei $g := \overline{f(-x)}$ und $h(x) := (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$. Dann folgt, dass

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\xi) \quad &= \quad \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\cdot e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(-x)}\cdot e^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(-x)\cdot e^{i\xi x}\,\mathrm{d}x} \\
&\overset{t:=-x}{=} \quad \overline{\int_{\infty}^{-\infty} -f(t)\cdot e^{-i\xi t}\,\mathrm{d}t} = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-i\xi t}\,\mathrm{d}t} = \overline{\hat{f}(\xi)}.
\end{aligned}$$

Weiterhin ist auch

$$h(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{f(t-x)}\,\mathrm{d}t\bigg|_{x=0} = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \|f\|_2^2.$$

Mit Hilfe der Formel zur Rücktransformation und des Faltungssatzes ergibt sich weiterhin

$$h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(\xi)\cdot e^{i\xi x}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\cdot\hat{g}(\xi)\cdot e^{i\xi x}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2\cdot e^{i\xi x}\,\mathrm{d}\xi.$$

Werten wir auch das an der Stelle $x = 0$ aus, so ergibt sich schließlich

$$\|f\|_2^2 = h(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2\cdot e^0\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi}\|\hat{f}\|_2^2.$$

□

7 Hilfreiche Formeln

Bei der Fouriertransformation berechnet man immer Integrale über e-Funktionen, daher kann der folgende Trick nützlich sein. Sei hierzu $a > 0$ und $b, c \in \mathbb{R}$. Zunächst betrachten wir eine gewöhnliche quadratische Ergänzung:

$$-at^2 + bt + c = -a\left(t^2 - 2\frac{b}{2a}t \underbrace{+\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}}_{=0} - \frac{c}{a}\right) = -a\cdot\left(t - \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{b^2}{4a} + c.$$

Diese erweist sich nun als nützlich bei der Lösung des nachfolgenden Integrals:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2+bt+c}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\cdot\left(t-\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{b^2}{4a}+c}\,\mathrm{d}t = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\cdot\left(t-\frac{b}{2a}\right)^2}\,\mathrm{d}t\right)\cdot e^{\frac{b^2}{4a}+c}.$$

Mit Hilfe der Substitution $t - \frac{b}{2a} =: k$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}k$ erhalten wir daraus schließlich

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2+bt+c}\,\mathrm{d}t = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ak^2}\,\mathrm{d}k\right)\cdot e^{\frac{b^2}{4a}+c} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\cdot e^{\frac{b^2}{4a}+c} \quad \text{wegen} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ak^2}\,\mathrm{d}k = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$