

# Lösung der harmonischen Oszillator-Gleichung

Lucas Kunz

8. Dezember 2016

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Physikalische Herleitung</b>	<b>2</b>
1.1	Gravitation . . . . .	2
1.2	Reibung . . . . .	2
1.3	Kombination zu einer Differentialgleichung . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Mathematische Lösung</b>	<b>3</b>
2.1	Ansatz und charakteristisches Polynom . . . . .	3
2.2	Oszillatorischer Fall . . . . .	4
2.3	Aperiodischer Grenzfall . . . . .	5
2.4	Stark gedämpfter Fall . . . . .	6

# 1 Physikalische Herleitung

Der einfachste und anschaulichste harmonische Oszillator in der Physik ist ein schwingendes Pendel. Zur Vereinfachung betrachten wir den Pendelkörper als perfekt symmetrisch, sodass wir seinen Massenschwerpunkt im Zentrum annehmen können. Auf dieses Pendel wirken zwei Kräfte: Die Gravitation seitens der Erde und die Dämpfung der Bewegung durch den Luftwiderstand. um die Pendelbewegung beschreiben zu können brauchen wir also zunächst eine genaue Beschreibung dieser beiden Kräfte.

## 1.1 Gravitation

Wie in Abbildung 1 erkannt werden kann, wirkt nicht die gesamte Gewichtskraft  $F_G$  des Pendelkörpers (rot eingezeichnet) der Auslenkung entgegen, sondern nur ein Teil derer. Um diesen zu berechnen zerteilt man die Gravitation in die Normalkraft  $F_N$  parallel zum Seil und die Rückstellkraft  $F_R$  senkrecht dazu. Für die Bewegung ist nur letztere relevant, da die erstgenannte vom Seil und der Aufhängung kompensiert wird. Diese ergibt sich mit Hilfe von Trigonometrie als

$$F_R = F_G \cdot \sin(\varphi) = m \cdot g \cdot \sin(\varphi). \quad (1.1)$$

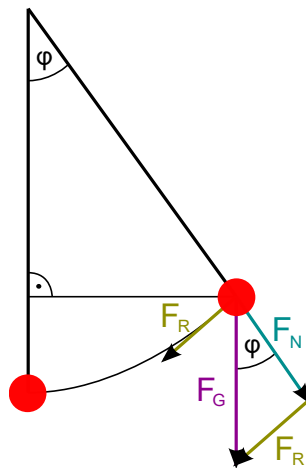


Abbildung 1: Darstellung eines Fadenpendels samt der wirkenden Kräfte

## 1.2 Reibung

Die Reibung ist stets proportional zur Geschwindigkeit. Diese ergibt sich im Fall des Pendels als  $v = l \cdot \dot{\varphi}$ , wobei  $l$  die Länge des Seils ist. Entsprechend lässt sich die dämpfende Kraft schreiben als

$$F_{\text{Reibung}} = \eta \cdot l \cdot \dot{\varphi} \quad (1.2)$$

mit der Dämpfungskonstanten  $\eta$ , in der alle Informationen zum Luftwiderstand stecken.

## 1.3 Kombination zu einer Differentialgleichung

Kombiniert man alle auf die Bewegung einwirkenden Kräfte und vergleicht man das Ergebnis mit Newtons Axiom, dann ergibt sich die Gleichung

$$F_{\text{gesamt}} = -F_{\text{Reibung}} - F_R \Leftrightarrow m \cdot a = m \cdot l \cdot \ddot{\varphi} = -\eta \cdot l \cdot \dot{\varphi} - m \cdot g \cdot \sin(\varphi). \quad (1.3)$$

Die negativen Vorzeichen auf der rechten Seite wurden gewählt, da die Rückstellkraft  $F_R$  und die Reibung  $F_{\text{Reibung}}$  der Auslenkung entgegenwirken. Zur weiteren Vereinfachung lässt sich die Näherung kleiner Auslenkungen nutzen, für die gilt dass  $\sin(\varphi) \approx \varphi$ . Dadurch erhält man eine homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung in  $\varphi$ :

$$m \cdot l \cdot \ddot{\varphi} + \eta \cdot l \cdot \dot{\varphi} + m \cdot g \cdot \varphi = 0. \quad (1.4)$$

Eine Lösungsfunktion dieser Differentialgleichung beschreibt die Bewegung des Pendels.

## 2 Mathematische Lösung

Bevor man die in 1.4 gegebene Gleichung löst, benennt man einige Konstanten um. Dies geschieht folgendermaßen:

$$\omega_0^2 := \frac{g}{l}, \quad \alpha := \frac{\eta}{m}. \quad (2.1)$$

Indem man die bereits erwähnte Gleichung 1.4 nun auf beiden Seiten durch  $m$  und  $l$  teilt erhält man somit die Form

$$\ddot{\varphi} + \alpha \cdot \dot{\varphi} + \omega_0^2 \cdot \varphi = 0. \quad (2.2)$$

### 2.1 Ansatz und charakteristisches Polynom

Zur Lösung dieser Gleichung nutzt man nun einen einfachen Ansatz und nimmt an, dass es Lösungen der Form

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} \quad (2.3)$$

gibt. Setzt man diesen Ansatz ein, so ergibt sich

$$\lambda^2 \cdot e^{\lambda t} + \alpha \cdot \lambda \cdot e^{\lambda t} + \omega_0^2 \cdot e^{\lambda t} = 0. \quad (2.4)$$

Kürzt man daraus schließlich die  $e$ -Funktion (da diese keine Nullstellen hat ist dies mathematisch erlaubt) erhält man das sogenannte **charakteristische Polynom** der Gleichung:

$$\lambda^2 + \alpha \cdot \lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (2.5)$$

Die Lösungen  $\lambda$  dieser quadratischen Gleichung (mit pq-Formel oder abc-Formel) sind die möglichen Parameter, die in den Ansatz eingesetzt eine Lösungsfunktion der Differentialgleichung ergeben. Es gilt

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \omega_0^2}. \quad (2.6)$$

Durch diese beiden  $\lambda$  haben wir zwei Lösungen der Gleichung 1.4 gefunden:

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t} = e^{-\frac{\alpha}{2} t} \cdot e^{\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \omega_0^2} t} \quad (2.7)$$

$$\varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t} = e^{-\frac{\alpha}{2} t} \cdot e^{-\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \omega_0^2} t}. \quad (2.8)$$

Eine allgemeine Lösung ergibt sich als Linearkombination dieser beiden Funktionen, also durch

$$\varphi(t) = c_1 \cdot \varphi_1(t) + c_2 \cdot \varphi_2(t). \quad (2.9)$$

Die Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  werden durch Anfangsbedingungen festgelegt. Je nach Größe der Parameter  $\alpha$  und  $\omega_0^2$  gibt es 3 verschiedene Fälle zu unterscheiden.

## 2.2 Oszillatorischer Fall

Dieser Fall beschreibt eine schwach gedämpfte Schwingung, also ein Verhältnis der Art

$$\omega_0^2 > \frac{\alpha^2}{4}. \quad (2.10)$$

In diesem Fall ergibt sich ein Problem mit der Wurzel, da sich in dieser eine negative Zahl befindet. Indem man ein  $i$  davor schreibt und die Reihenfolge der Subtraktion ändert, lässt sich dies umgehen:

$$\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \omega_0^2} = i \underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\alpha^2}{4}}}_{=: \omega} = i\omega. \quad (2.11)$$

Zur Abkürzung nennen wir im weiteren Verlauf die Wurzel kurz  $\omega$  (nicht zu verwechseln mit  $\omega_0$ ). Die allgemeine Lösung  $\varphi$  lässt sich damit also schreiben als

$$\varphi(t) = c_1 \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cdot e^{i\omega t} + c_2 \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cdot e^{-i\omega t}. \quad (2.12)$$

Um die beiden Funktionen  $e^{i\omega t}$  und  $e^{-i\omega t}$  in  $\sin(\omega t)$  und  $\cos(\omega t)$  umschreiben zu können, führen wir neue Konstanten ein:

$$d_1 := \frac{c_1 + c_2}{2}, \quad d_2 := \frac{c_1 - c_2}{2}. \quad (2.13)$$

Mit diesen neuen Konstanten lässt sich also schreiben

$$\varphi(t) = d_1 \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cdot \underbrace{(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})}_{=2 \cdot \cos(\omega t)} + d_2 \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cdot \underbrace{(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})}_{=2i \cdot \sin(\omega t)} \quad (2.14)$$

$$= \tilde{d}_1 \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cdot \cos(\omega t) + \tilde{d}_2 \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cdot \sin(\omega t), \quad (2.15)$$

wobei nun  $\tilde{d}_1 = 2 \cdot d_1$  und  $\tilde{d}_2 = 2i \cdot d_2$  sind, sodass die Vorfaktoren 2 vor dem Kosinus und  $2i$  vor dem Sinus nicht mehr einzeln in der Gleichung stehen. Gleichung 2.15 stellt nun also die allgemeine Schwingungsgleichung im schwach gedämpften Fall dar. Für ein bestimmtes physikalisches Problem sind nun die Anfangsbedingungen wichtig. Nehmen wir an, wir lassen das Pendel aus Auslenkung  $\varphi_0$  los, ohne ihm einen Stoß mitzugeben. Mathematisch entspricht dies den Bedingungen

$$\varphi(0) = \varphi_0 \quad \text{und} \quad \dot{\varphi}(0) = 0. \quad (2.16)$$

Um diese zu nutzen, werten wir die allgemeine Lösungsfunktion aus 2.15 und ihre erste zeitliche Ableitung an der Stelle  $t = 0$  aus. Hierzu müssen wir die Ableitung zunächst allgemein berechnen:

$$\dot{\varphi}(t) = -\frac{\alpha}{2} \cdot \tilde{d}_1 \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cdot \cos(\omega t) - \omega \cdot \tilde{d}_1 \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cdot \sin(\omega t) - \frac{\alpha}{2} \cdot \tilde{d}_2 \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cdot \sin(\omega t) + \omega \cdot \tilde{d}_2 \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cdot \cos(\omega t).$$

Anschließend erfolgt die bereits genannte Auswertung:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \tilde{d}_1 \cdot \cos(0) + \tilde{d}_2 \cdot \sin(0) = \tilde{d}_1 \stackrel{!}{=} \varphi_0 \\ \dot{\varphi}(0) &= -\frac{\alpha}{2} \cdot \tilde{d}_1 \cdot \cos(0) - \omega \cdot \tilde{d}_1 \cdot \sin(0) - \frac{\alpha}{2} \cdot \tilde{d}_2 \cdot \sin(0) + \omega \cdot \tilde{d}_2 \cdot \cos(0) \\ &= -\frac{\alpha}{2} \cdot \tilde{d}_1 + \omega \cdot \tilde{d}_2 \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Aus diesen beiden Bedingungen erhält man schließlich eindeutige Festlegungen für die Konstanten  $\tilde{d}_1$  und  $\tilde{d}_2$ , nämlich

$$\tilde{d}_1 = \varphi_0 \quad \text{und} \quad \tilde{d}_2 = \frac{\alpha}{2\omega} \cdot \tilde{d}_1 = \frac{\alpha}{2\omega} \cdot \varphi_0. \quad (2.17)$$

Die Lösungsfunktion lautet in diesem Fall also

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cdot \cos(\omega t) + \frac{\alpha}{2\omega} \cdot \varphi_0 \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cdot \sin(\omega t) \quad (2.18)$$

$$= \varphi_0 \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cdot \left( \cos(\omega t) + \frac{\alpha}{2\omega} \cdot \sin(\omega t) \right). \quad (2.19)$$

Für den einfachen Spezialfall ohne Dämpfung ( $\alpha = 0$ ) gilt also

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cdot \cos(\omega_0 t), \quad (2.20)$$

weil in diesem Fall  $\omega = \omega_0$  gilt. Der allgemeine Ansatz ohne bereits eingesetzte Anfangsbedingungen für diesen Fall lautet

$$\varphi(t) = \tilde{d}_1 \cdot \cos(\omega_0 t) + \tilde{d}_2 \cdot \sin(\omega_0 t). \quad (2.21)$$

Die Frequenz  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$  bezeichnet man daher auch als **Eigenfrequenz** des Pendels.

## 2.3 Aperiodischer Grenzfall

Der aperiodische Grenzfall ist genau jener, für den

$$\frac{\alpha^2}{4} = \omega_0^2, \quad (2.22)$$

also fällt die Wurzel im Exponenten weg und es vereinfacht sich die zu Lösungsfunktion aus 2.9 zu

$$\varphi(t) = c_1 \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}t} + c_2 \cdot t \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}t}. \quad (2.23)$$

Auch hier lassen sich die verbleibenden Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  durch Anfangsbedingungen bestimmen, wie das im oszillatorischen Fall beispielhaft getan wurde.

Doch warum taucht im zweiten Term ein zusätzliches  $t$  auf, das in den speziellen Lösungen  $\varphi_1(t)$  und  $\varphi_2(t)$  eigentlich nicht steht? Besagte Funktionen unterscheiden sich nur durch den Faktor mit der Wurzel im Exponenten, der in diesem Fall aber nur  $e^0 = 1$  ist, daher sind beide Funktionen identisch,

$$\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \omega_0^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1(t) = \varphi_2(t). \quad (2.24)$$

Der Wert  $\lambda$  ist also eine zweifache Nullstelle des charakteristischen Polynoms 2.5. In solchen Fällen reicht es nicht aus, einfach Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  einzuführen, sondern es bedarf eines zusätzlichen Faktors  $t$ . Hätten wir eine Gleichung dritten Grades (also mit einer dritten Ableitung von  $\varphi$  darin), so wäre sogar ein weiterer Term mit  $t^2$  vonnöten, analog setzt sich dies für Gleichungen von noch höherem Grad fort. Da die genaue Erklärung dazu, wie dieser Faktor mathematisch zustande kommt, an dieser Stelle zu weit führen würde, sei diesbezüglich auf das Ende des Semesters verwiesen, an dem in HM I üblicherweise Differentialgleichungen wie diese genauer besprochen werden.

## 2.4 Stark gedämpfter Fall

Dieser Fall ist durch die Ungleichung

$$\frac{\alpha^2}{4} > \omega_0^2 \quad (2.25)$$

beschrieben und wird analog zum oszillatorischen Fall gelöst. Man definiert hierzu

$$\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \omega_0^2} =: \Omega \quad (2.26)$$

und erhält eine Gleichung, die sehr ähnlich zu 2.12 ist:

$$\varphi(t) = c_1 \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cdot e^{\Omega t} + c_2 \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cdot e^{-\Omega t}. \quad (2.27)$$

Auch hier kann man wie in den beiden anderen Fällen nun die Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  mit Hilfe von Anfangsbedingungen bestimmen. Eine Umschreibung in Sinus und Kosinus ist in diesem Fall allerdings nicht möglich, da in keinem der Exponenten ein  $i$  steht. Es ist allenfalls möglich, durch Einführung von neuen konstanten  $d_1$  und  $d_2$  wie in 2.13 eine Gleichung mit Termen von Sinus hyperbolicus und Kosinus hyperbolicus zu erhalten. Da die aber eher weniger anschaulich ist als die bereits gegebenen Exponentialfunktionen ist eine derartige Umschreibung mit neuen Konstanten für diesen Fall nicht ratsam.